Электрический диполь

Электрическим диполем называется система из двух одинаковых по модулю и различных по знаку зарядов $+q$ и $-q$, разнесенных на постоянное расстояние l.

Отрезок, соединяющий заряды, называется осью диполя. Эту ось принято обозначать через вектор $\vec{l}$, равный по модулю расстоянию между зарядами и направленный от $-q$ к $+q$.

Электрическим дипольным моментом называется произведение модуля одного из зарядов на вектор $\vec{l}$:

$$\vec{p} = |q|\vec{l} \tag{1}$$

Центром диполя считается центр его оси. Введя полярную систему координат, в которой полярная ось совпадает по направлению с l, а центр находится в центре диполя, любую точку пространства относительно диполя можно представить в виде сочетания координат (r, ϑ), либо как вектор $\vec{r}$.

Найдем потенциал поля диполя. Он складывается из потенциала полей первого и второго зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{+q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}) = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}) \tag{2}$$

Здесь r_+ и r_- – расстояния до $+q$ и $-q$ соответственно. Таким образом:

$$\varphi = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \tag{3}$$

Введем векторы $+\vec{a}$ и $-\vec{a}$, выходящие из центра диполя, по модулю равные половине длины его оси и направленные в стороны положительного и отрицательного зарядов соответственно. Зная вектор $\vec{r}$, проведенный из центра диполя в произвольную точку пространства, можем приближенно найти расстояния от этой точки до зарядов:

$$r_+ = r - a\cos\vartheta = r - (\vec{a}; \vec{e}_r) \tag{4}$$

$$r_- = r + a\cos\vartheta = r + (\vec{a}; \vec{e}_r) \tag{5}$$

Вернемся к формуле (3). Произведение $r_+ r_-$ с высокой точностью можно представить как r^2. Разность $r_- - r_+$ раскрывается по формулам (4) и (5):

$$r_- - r_+ = 2a\cos\vartheta = (2\vec{a}; \vec{e}_r) = (\vec{l}; \vec{e}_r) \tag{6}$$

Отсюда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(|q|\vec{l}; \vec{e}_r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{p}; \vec{e}_r)}{r^2} \tag{7}$$

Можно раскрыть скалярное произведение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2} \tag{8}$$

Чтобы найти напряженность поля диполя, найдем ее проекции на вектор, перпендикулярный радиус-вектору и на сам радиус-вектор (E_ϑ и E_r соответственно):

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\vartheta}{r^3} \tag{9}$$

$$E_\vartheta = -\frac{d\varphi}{rd\vartheta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\vartheta}{r^3} \tag{10}$$

Квадрат напряженности равен сумме квадратов найденых проекций (т.к. оси, на которые они сделаны, образуют прямоугольную декартову систему координат):

$$E^2 = (\frac{p}{4\pi r^3\varepsilon_0})^2(4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = (\frac{p}{4\pi r^3\varepsilon_0})^2(1 + 3\cos^2\vartheta) \tag{11}$$

Найдем модуль напряженностив:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta} \tag{12}$$

Если внести диполь в поле $\vec{E}$, на каждый заряд будет действовать сила:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{13}$$

Модуль момента пары сил, действующих на диполь, равен произведению модуля любой силы на плечо:

$$N = |q|El\sin\vartheta = pE\sin\vartheta \tag{14}$$

Можно переписать это соотношение в векторном виде:

$$\vec{N} = [\vec{p}; \vec{E}] \tag{15}$$

Потенциальная энергия диполя относительно поля, в которое он помещен, равна:

$$W_p = |q|(\varphi_+ - \varphi_-) \tag{16}$$

Здесь φ_+ и φ_- – потенциалы внешнего поля в тех точках, которые являются проекциями точек с зарядами q_+ и q_- на какую-нибудь линию напряженности поля $\vec{E}$. Введя ось x, совпадающую по направлению с $\vec{E}$, распишем выражение для потенциальной энергии:

$$W_p = |q|(\varphi_+ - \varphi_-) = -|q|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x \tag{17}$$

Δx – модуль проекции оси диполя на ось x. Отсюда:

$$W_p = -|q|El\cos\vartheta = -pE\cos\vartheta \tag{18}$$

Либо в векторном виде:

$$W_p = -(\vec{p};\vec{E}) \tag{19}$$